Série 2b Questions

Exercise 2b.1 – Poisson effect

Considering the statue seen in Figure 2b., we want to study the lateral strain of the column holding it. The statue's mass is 883 kg and its weight is uniformly spread on the column's cross-section. The material of the column is brittle. The Young's modulus of the material is 1.10 GPa. Its Poisson's ratio is 0.34. The height of the column is 2.1 meter in the two cases.

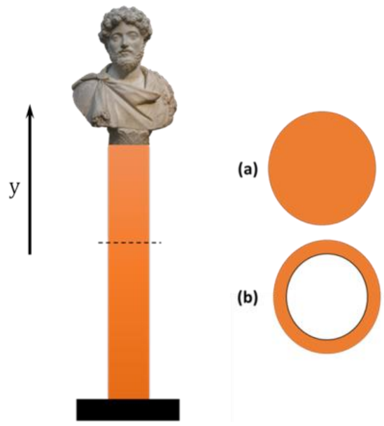

Figure 2b.1 | Schematic of the column with the statue on top and the two different types of cross - sectional areas.

Between cross-section a and b, which is the best solution to minimize the lateral strain to which the column is submitted? Verify your assumption by calculating the lateral strain of the column for the two following cases:

- ***a)*** ***The column is full and its radius is 50* cm**
- ***b)*** ***The column is hollow in the center: Its external radius is 50* cm *and its internal radius is 49* cm.**

Texte en Français

On considère la statue en Figure 2b., nous voulons étudier la déformation relative latérale de la colonne qui la maintient. Le poids de la statue est de 883 kg et est uniformément réparti sur la section transversale de la colonne. Le matériau de la colonne est friable. Le module de Young de la matière est de 1.10 GPa. Son coefficient de Poisson a une valeur de 0.34. La hauteur de la colonne est de 2,1 mètres dans les deux cas.

Entre les sections a et b, quelle est la meilleure solution pour minimiser la déformation relative latérale à laquelle la colonne est soumise? Vérifier votre hypothèse en calculant la déformation relative latérale de la colonne pour les deux cas suivants:

- **a) La colonne est pleine et son rayon est de 50 cm**
- **b) La colonne est creux au centre : son rayon externe est de 50 cm et son rayon interne est de 49 cm.**

Exerise 2b.2 – Hooke’s Law in 3D

We apply a load F on a cubic piece of 1 mm width as shown in Figure 2b.2. The material’s Young modulus is 200 GPa, Poisson’s ratio 0.25 and the measured stress tensor is given as follow. We suppose the material to be homogeneous and isotropic.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 30 & 80 \\ 30 & 180 & 50 \\ 80 & 50 & 220 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

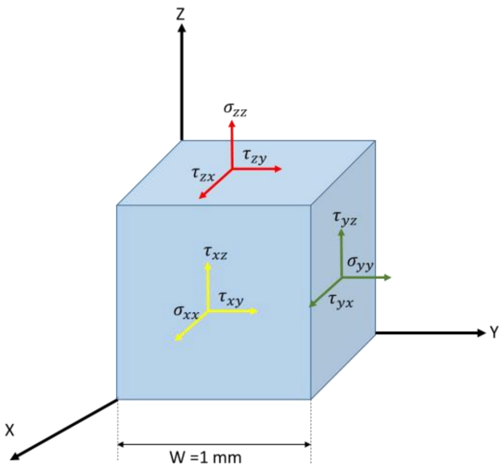

Figure 2b.2 | Stress components on a 3D cube

a) Determine the compliance matrix of the material
b) Determine the stress vector of this cube, when submitted to this load
c) Determine the strain vector of this cube, when submitted to this load
d) What has been the volume variation of the solid after the load has been applied?

Texte en Français

Nous appliquons une charge F sur une pièce cubique de 1 mm de largeur comme indiqué dans la Figure 2b.2. Le module de Young du matériau est 200 GPa, le Coefficient de Poisson 0,25 et le tenseur de contrainte mesuré est donné comme suit. Nous supposons que le matériau est homogène et isotrope.

a) Déterminer la matrice de souplesse du matérieau

b) Déterminer le vecteur de contrainte de ce cube lorsque soumis à cette charge

c) Déterminer le vecteur de déformation de ce cube lorsque soumis à cette charge

d) Quelle est la variation du volume du solide après l’application de cette charge?

Exercise 2b.3 – Poisson Ratio and Elasticity modulus

Consider a magnesium plate (seen in Figure 2b.3.1) in biaxial stress being subjected to the tensile stresses $\boldsymbol{\sigma_x}$ = 24 MPa and $\boldsymbol{\sigma_y}$ =12 MPa. The corresponding strain in the plate are $\varepsilon_x = 440 \cdot 10^{-6}$ and $\varepsilon_y = 80 \cdot 10^{-6}$.

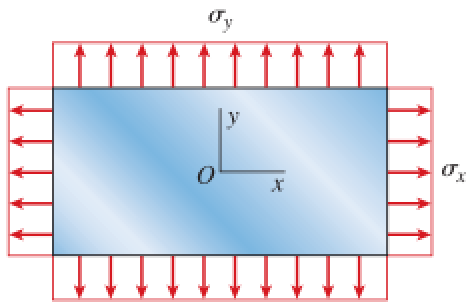

Figure 2b.3.1 | Block with Applied Stresses

a) Determine the Poisson's ratio and Young's modulus of the material

b) Determine the volume change in percentage of the material under these loads and strains

Suppose the magnesium plate is now fixed to the two fixed plates above and below, as shown in Figure 3b.3.2, which prevent any movement in the z axis ($\varepsilon_z = 0$). When the plane-stresses are now applied a reaction force causing a stress of 12.6 MPa will occur on the body. Consider the same Poisson's ratio and Young's modulus

c) Determine how these constraints influences the volume change of the material

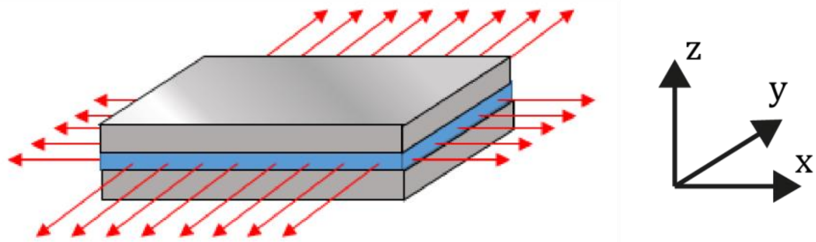

Figure 2b.3.2 | Block with constraints applied on the two sides of the plate

Texte en Français

Considérer une plaque de magnésium (voir la figure 2b.3.1) sous contrainte biaxiale, soumise aux contraintes de traction $\boldsymbol{\sigma_x}$ = 24 MPa et $\boldsymbol{\sigma_y}$ = 12 MPa. Les déformations relatives correspondantes dans la plaque sont $\varepsilon_x = 440 \cdot 10^{-6}$ et $\varepsilon_y = 80 \cdot 10^{-6}$.

a) Déterminer le coefficient de Poisson et le module de Young du matériau

b) Déterminer le pourcentage du changement de volume du matériau lorsque soumis à ces charges et contraintes

Supposons maintenant que l'object est bloquée par deux plaques fixées au-dessus et en dessous, (comme montré dans la Figure 2b.3.2), qui empêchent une déformation suivant l'axe z. Quand les contraintes sont appliquées, une force de réaction causant une contrainte de 12.6 MPa se produit sur l'objet. Considérons les mêmes coefficients de Poisson et modules de Young.

c) Déterminer comment ces contraintes influencent le changement relatif de volume du matériau

Exercise 2b.4 – Pipe casing

A plastic cylindrical pipe is inserted as a liner inside a cast-iron pipe. We compress the plastic pipe with a load F. We use the parameters listed in the following table and represented in Figure 2b.4.

Parameters	Plastic pipe	Cast-iron pipe
Length	$L_p = ?$	$L_c = 0.205\ m$
Diameter	$d_1 = 109\ mm$	Inner : $d_2 = 110\ mm$ Outer : $d_3 = 115\ mm$
Young Modulus	$E_p = 2.1\ GPa$	$E_c = 170\ GPa$
Poisson's ratio	$\nu_p = 0.4$	$\nu_c = 0.3$

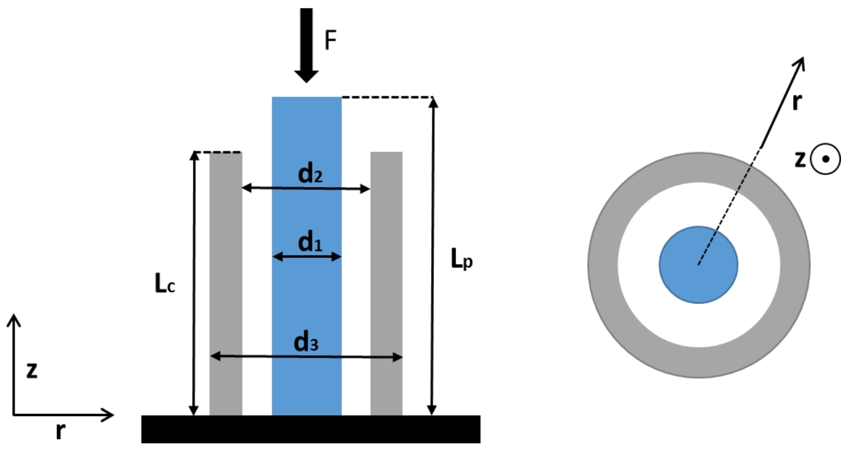

Figure 2b.4 | Plastic pipe in cast-iron pipe

We compress the plastic pipe with F so that the final length of both pipes is the same and also, at the same time, the final outer diameter of the plastic pipe is equal to the inner diameter of the cast-iron pipe so that no stress is applied on the cast-iron pipe.

a) Derive a formula for the required initial length L_p with the Poisson's ratio (not as a function of F). Calculate the value of L_p.

b) What is the final stress along in the vertical and the radial direction in the plastic and in the cast-iron pipe?

c) What is the required force F?

d) Determine the ratio between final and initial volumes for the plastic pipe.

Texte en Français

Un tuyau cylindrique en plastique est inséré comme doublure à l'intérieur d'un tuyau en fonte. Nous compressons le tuyau en plastique avec une charge F. Nous utilisons les paramètres énumérés dans le tableau suivant et représentés dans la figure 2b.4.

Nous compressons le tuyau en plastique avec F de sorte que la longueur finale des deux tuyaux soit la même et aussi, en même temps, que le diamètre extérieur final du tuyau en plastique soit égal au diamètre intérieur du tuyau en fonte, de telle sorte qu'aucune contrainte ne soit appliquée sur le tuyau en fonte.

a) **Dériver une formule pour la longueur initiale L_p requise en fonction du coefficient de Poisson (et non en fonction de F). Calculer la valeur de L_p.**

b) **Quelle est la contrainte finale dans la direction verticale et radiale dans le plastique et dans le tuyau en fonte?**

c) **Quelle est la force F requise?**

d) **Déterminer le rapport entre le volume final et initial pour le tuyau en plastique.**

Exercise 2b.5 – Dielectric actuator design

A Dielectric Actuator is an actuator which finds it's working principle in an applied electric field between two stretchable electrodes. As a voltage is applied, the two electrodes are attracted to each other through electrostatic attraction. A dielectric film prevents the flow of current.

The electrostatic force within the dielectric, under an applied electric field, is given as

$$F_z = -\frac{1}{2}\frac{{Q_p}^2}{\varepsilon_d A_p}$$

Where A_p is the planar cross-sectional area (x-y plane), ε_d the dielectric permittivity. The charges in the plane are given by

$$Q_p = \frac{V\varepsilon_d A_p}{d_0}$$

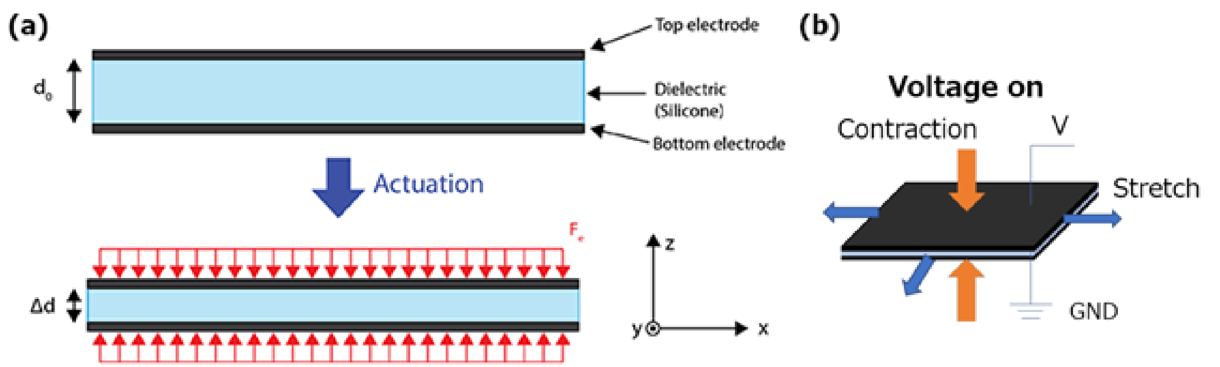

Figure 2b.5 | (a) Sketch of the problem, **(b)** working principle of a Dielectric Actuator

Where d_0 stands for the dielectric thickness and V is the applied voltage. When the dielectric is squeezed by the applied voltage, it also expands in-plane. In elastomers the compression and the expansion are mechanically coupled due to their incompressibility. The tensile stress due to this expansion equals to the compressive stress (this is one way to find the stress components):

$$\sigma_x = \sigma_y = -\sigma_z$$

Now suppose we have the actuator, as shown in figure 3.b.5, with a 200 μm thick dielectric made out of silicone which we actuate this under a voltage of 1 [kV]. The dielectric permittivity is 35.4*10^{-12} [N/V^2], and the material has a Poisson's ratio of 0.5, as well as an elastic modulus of 1.2 [MPa]. The material behaves isotropic and has linear elastic properties. We ignore the stiffness and any influence of the top electrodes.

- **a) Under the given load, calculate the tensile and compressive stresses in the dielectric**
- **b) For the calculated stresses, find the strain components of the dielectric**
- **c) Give the change in volume of the dielectric**
- **d) Suppose we introduce an additional shear stress of 1 kPa in the positive x direction on the x-y plane. What effect does this have on the already present strain state and change in volume?**

Texte en Français

Un actionneur diélectrique est actionnée par l'application d'un champ électrique entre deux plaques conductrices servant d'électrodes. Lorsqu'une tension est appliquée, les deux électrodes sont attirées l'une vers l'autre par une force électrostatique. Un film diélectrique empêche le flux de courant.

Les forces électrostatiques dans le diélectrique résultantes du champ électrique appliqué, sont données comme :

$$\mathrm{F}_z = -\frac{1}{2}\frac{{Q_p}^2}{\varepsilon_d A_p}$$

La surface plane est donnée par $\mathrm{A_p}$ (plan x-y), la permittivité du diélectrique par ε_d. Les formules générales pour les charges dans le plan sont données par :

$$Q_p = \frac{V \varepsilon_d A_p}{d_0}$$

L'épaisseur diélectrique est représentée par d_0 et la tension appliquée par V. Lorsque le diélectrique est pressé sous la tension appliquée, il se dilate également dans le plan. Chez les élastomères, la compression et l'expansion sont mécaniquement couplées en raison de leur incompressibilité. La contrainte de traction due à cette expansion est égale à la contrainte de compression (c'est une manière de trouver les composants de la contrainte):

$$\sigma_x = \sigma_y = -\sigma_z$$

Supposons maintenant que nous ayons l'actionneur, comme le montre la Figure 3b.5, avec un diélectrique de 200 µm d'épaisseur en silicone. Nous l'activons avec une tension appliquée de 1 [kV]. Le diélectrique a une permittivité de $35{,}4 \cdot 10^{-12}$ [N/V²], un Coefficient de Poisson de 0,5, et un module de Young de 1,2 [MPa]. Le matériau se comporte isotropiquement et a des propriétés élastiques linéaires. Nous ignorons la rigidité et toute influence des électrodes supérieures.

a) Sous la charge donnée, calculer les contraintes dans le diélectrique
b) Pour les contraintes calculées, trouver les composants de la déformation relative du diélectrique
c) Indiquer le changement de volume du diélectrique
d) Supposons que nous introduisions une contrainte de cisaillement supplémentaire de 1 kPa dans la direction positive de l'axe x sur le plan x-y. Quel effet cela a-t-il sur l'état de la déformation et le changement de volume déjà présents?